非線形性とくりこみ*

大野克嗣 〈Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1110 W Green, Urbana, IL 61801-3080, U.S.A.
e-mail: yoshi@kolmogorov.physics.uiuc.edu〉

我々の世界に満ち満ちている非線形性は，我々が知りたい（時空）スケールをそれから懸け離れた我々には知り得ないスケールと結合してしまう（1節）．だが，それにしては我々の世界はそんなに無法則的には見えない．ある現象が「よく変わる部分」と「そうでない部分」からなるなら，後者に目をつけることで現象がわかった気になれるようだ（2節）．「くりこみ」は「そうでない部分」を浮き彫りにしてくれる．そこでまず，簡単な例でくりこみの処方を説明しよう（3節）．「くりこみ」で世界の細部によらない構造を抽出できるなら，それは系の長時間挙動の理解にも使えるだろう．より一般に，くりこみは（非線形系の）「漸近解析」の指針たりうるであろう（4節）．くりこみはこのような技術的問題に有効なだけでなく，もっと大きな文脈の中でも意味を持っているのではないだろうか（5節）．

1. 線形と非線形

銅でできた長さ $2\pi/k$ の針金の温度分布 $T(x,t)$（摂氏で計っておこう．ここで t は時刻，x は一端から計った位置座標）は，その空間的変化が緩やかなら，拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

に従う．ここで，正定数 κ は熱拡散係数といわれる．Fourier はこの方程式を導き，それを一般的に解くために，「$a_n(t)$ および $b_n(t)$ を時間の関数とすると，

$$T(x,t)=\frac{1}{2}a_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(t)\cos nkx+b_n(t)\sin nkx\} \tag{1.2}$$

がどんな解をも表現する」と提案した．この式を (1.1) に代入して三角関数の直交性を使うと異なった‘モード’を分離できる．つまり各モードの振幅の時間発展は各モードのなかで閉じている：たとえば，

$$\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}=-\kappa n^2k^2a_n(t). \tag{1.3}$$

もとの偏微分方程式は各モードの従う常微分方程式の束に互いの干渉なしに分かれてしまった．各モードが干渉しないということは異なった長さのスケールが没交渉だということである.**

こんなことが可能なのは拡散方程式が線形で重ね合わせの原理が成り立つからだ．つまり，T_1 と T_2 とがこの式を満たすならば，T_1+T_2 もそうだし，また勝手な数を T_1 にかけたものもそうだ．しかし，銅の針金について $T(x,t)$ が答えのとき，$10^{10}T(x,t)$ も答えであるなどとは誰も信じまい．教訓は，線形系は理想化ぬきにはまず考えられない，ということだ.*** 世の中たいていのことは線形ではない．

「線形でない」もしくは非線形な系で Fourier 式の解析がうまく行かないのは異なったスケールの間に干渉があるからである．そうするとスケールの絡み合いが非線形な系の重要な特徴と考えられる．そこで尺度干渉（スケール干渉）のある系として最も非線形系らしい系を積極的に特徴づけるのが自然である.†

尺度干渉はわれわれが直接観測できるスケールの現象とわれわれが観測することが（しばしば原理的に）できないスケールの現象との干渉を意味する．つまり，非線形系ではわれわれに不可知な現象††がわれわれの観測するものを乱しうる．

大雑把に言って，われわれのスケールで観測されるモードが線形不安定（たとえば $\dot{x}=x$ のように）であるとカオスや乱流のようなことが生じる.††† カオスが決定論的でも極めて予測不可能に振舞うのは初期条件をむやみと増幅する（尺度の干渉そのものである）からである．つまり，巨視的世界さえ‘可知’の部分で閉じることはない．これが，カオスの本質的意義である．

もしもわれわれのスケールで観測されるモードが中立安定であると（たとえば $\dot{x}=-x^3$ のように）臨界現象が生じる.†††† 異なった尺度間の干渉のために小さなスケールのモードはより大きなモードと干渉する．より大きなスケールのモードは中立安定の故になかなか減衰しないので干渉の効果が次々と蓄積され，さらにより大きなスケールのモードとも非線形に絡み合って大きな効果をもってしまうと

* 本稿の主要部分は筆者が，東芝寄付講座客員教授として慶應義塾大学物理学科滞在中に書かれた．

** もっと一般の場合は完備直交関数系に展開されるから，単純に長さの尺度による分解ではないが，その場合でも，各基底関数の形を見れば明らかに，代表的な大凡の長さのスケールはある．

*** Schrödinger 方程式は絶対値についての式ではないので厳密に線形でもかまわない．

† この「交流」は‘非線形’となっているが尺度干渉のある「本質的に非線形な系」のみを相手にし，可積分系は考慮の外におく．また「非線形とくりこみ」というとカオスへの転移点でのくりこみを連想する人も多いかも知れないが，あれは平衡相転移の臨界現象と本質が同じであるので論じない．

†† ここで不可知と言っているのは時代の制約のもとにある不可知ではなく，絶対的不可知である．

††† もちろん系の自由度はひどく小さくはないとし，大域的安定性はあると仮定する．

†††† ただし，いろんなスケールのモードがあるとき．

いうのが臨界現象である．

たとえ観測できるモードが安定でも（たとえば $\dot{x}=-x$ のように）尺度干渉があれば掛け離れたスケールも一般には無視できない．その結果，いろんな量の次元が素朴な次元解析による定義からずれたように見えうる（異常次元）．たとえば，長さのスケールをもった量がわれわれのサイズの L とミクロな l の二つあるとする．p がどんな実数でも $L'\equiv L^{1-p}l^p$ は L と同じ長さの次元をもっている．そこで L のかわりに L' が顔を出しても次元的には何ら問題はないが，その結果から l を無視すると次元が狂ったように見える．

「非線形物理」なるコースがあるとすると，それは，上に述べたような尺度干渉がひきおこす代表的現象（もっと他にもあるだろう）の説明とそれを理解するための手段の解説とからなるはずだ．「非線形物理」というと，（多体問題とか協力現象とかの）「明らかに非線形だがより明快な特徴付けのできる正統的物理諸分野」を除くというニュアンスのあることが多いが，筆者はこのような「正統的分野」も含めて非線形性そのものに由来する一般的現象を鳥瞰する分野という意味に「非線形物理」を使いたい．そして，これが何か新しい分野であるという見方に組みしない．

「くりこみ」が非線形物理の技術的かつ思想的な柱であると筆者が言うのもまんざら嘘ではないと感じてくれる人を増やすのが，この交流の目的である．

2. 世界の現象論的理解

尺度干渉は不可知な世界とわれわれの世界を結合してしまう．しかし，われわれの世界がカオスや乱雑性の研究から期待したほど‘無法な’世界でないことも我々は知っている．

もし世界が完全に無法則的で認知できるパターンがないなら，大きな脳は無駄である．したがって，われわれが脳を持つということはこの世の‘合’法則性の現れである．魚が流体力学的に見事な形をもっているのは，水が流体力学的性質を持っているからであって，当然ながら，魚が泳ぐのが原因で水が流体力学に従うわけではない．[†] 同じ論法で，論理や基本的な数学がわれわれの住む世界にわれわれの有無を離れて存在し，その証拠がわれわれの大きな脳であると見るのが動物行動学的に合理的だ．[††]

ではこの世の非線形性による不可知の増幅は実際には大した効果をもっていないのだろうか？

ここでわれわれはどういうときに，ある現象をわかった気になるか考えてみよう．個々の現象の細部まで理解しなくてはわかった気分になれないなら，世界はどのように見えるだろうか？　毎日がひどく新鮮になるだろうけれど，実際はそうではない．結局，世界にはくるくるとよく変わる部分と，そうでない部分があって，そうでない部分が見慣れたものならば，われわれはその現象を分かったとして安心して生きていけるようだ．[†††]

こういう理解を「現象論的理解」という．誰が見てもうまく行っている現象論の例を見て，その特徴をはっきりさせておこう．

例 1.　‘普通’の流体の（ゆっくりした[††††]）流れを考えよう．その（外力なしの）運動は Navier–Stokes 方程式：

$$\rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right\}=\eta\Delta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nabla}p \tag{2.1}$$

に支配される．ここで p は圧力，$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル場で非圧縮条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$ を課する．さらに，ρ と η はそれぞれ流体の密度と剪断粘性係数であり個々の系で異なる．これらは，流体力学の立場では，単なる調節パラメタである．驚くべきことは，方程式の構造に全く手をふれることなく，ただこの二つの‘現象論的パラメタ’をいじるだけで多種多様な流体（たとえば，空気，水，水飴）の（おそい）流れが記述されることである．□

この例を一般化すると次のようになるだろう．ある‘現象のクラス’の現象論的記述（現象論）という言葉はつぎのことを意味する：クラスの中の特定の系（に起こる現象）はクラス全体に共通な‘ユニバーサルな（普遍的な）’数学的構造と個々の系固有の‘現象論的パラメタ’とで記述される．スローガンとしては，[1]

‘現象論’＝‘ユニバーサルな数学的構造’
　　＋‘現象論的パラメタ’　(2.2)

例 2.　ポリマー（高分子）はモノマーが N 個つながってできた長い分子である．ポリマーの数密度を c とする．一つのポリマーが広がっている領域はだいたい半径 $R\sim N^{\nu}$ の球である；ここで ν は 1/2 より少し大きい．この中にいくつポリマー（の重心）が（三次元空間で）入っているかはだいたい $cR^3\sim cN^{3\nu}$ と見積もれる．一方，一つ一つのポリマーが N 個のモノマーでできているから，モノマーの数密度は cN である．$3\nu>1$ だから，$cN^{3\nu}$ を一定に保って，モノマー数密度ゼロ ($cN\to 0$) の極限をとることができる（適当に $c\to 0$ および $N\to\infty$ の極限をとればよい）．この極限では，高分子溶液の浸透圧 π はつぎのような形を取る：

$$\pi=ck_{\mathrm{B}}Tf(c/c^*). \tag{2.3}$$

ここで，k_{B} は Boltzmann 定数，T は絶対温度である．f は

† Konrad Lorenz:「鏡の背面」.

†† 「科学は錯覚である」，つまり法則性は人間の外にあるものではないと論じる向きもあるが，外界の存在を認める限り，ここに述べた論法から自由ではありえまい．抽象的なものもわれわれの外に存在しうる．Platon は極めて深い．

††† くるくる変わる部分に左右されるような生きものは知能を持つものへとは進化できなかった．

†††† 速くなると Navier–Stokes 方程式が一義解をもつかどうかもわかっていない．

ユニバーサルな関数で高分子とか溶媒の種類によらないが，c^*は現象論的パラメタで，これらによる．この普遍関数fは太田ら[2)]によってくりこみ理論を使って詳細に計算されており，くりこみ理論が定量的にも成功している代表的な例である．□

はるかに重要で基本的なユニバーサルな構造はそうとは認識されていない．一様な平衡状態にある大きなサイズの（人間的尺度の）物体をとれば平衡熱力学が成立する．すなわち，平衡熱力学の数学的構造はすべてこのような物体に共有されたユニバーサルな構造である．平衡から少しずれた非平衡状態では線形非平衡熱力学が成立する．これも物質系のユニバーサルな性質である．これらにおいては状態方程式とか構成方程式などといわれるものが現象論的パラメタの役を担っている．

Newton 力学自体も古典的運動一般の現象論的記述と解釈することができ，極めて大きなユニバーサリティクラス（普遍クラス）を形成している．この場合は，それぞれの系の質量とかポテンシャルが現象論的パラメタに当たり，二階微分方程式が，経験事実である Newton–Laplace の決定性の表現として，ユニバーサルな構造に相当する．さらに，各系の運動はその運動方程式と初期条件に分けて考えられ，前者がユニバーサルな構造，後者が現象論的調節パラメタに相当する．つまり，古典力学という大きなユニバーサリティクラスは中にそれぞれの系に対応する小さなユニバーサリティクラスを無数に含むのである．

結局，現象論的な世界の理解とは個々の現象の裏にある一般的な数学的構造を認識することである．† ただし，このために何も数学の知識がいるわけではない．犬でも猫でも古典力学が二階微分方程式であることがわかっているから，食われたり食いはぐれたりしないのだ．もちろん，わかっていることを自覚的に表現するのは簡単ではないから，犬の頭の中に微分方程式があるわけではない．しかし，これについては犬も人間も大差ない．

3. くりこみのイロハ

尺度干渉の故に我々の知り得ない世界が否応なく顔を出すこの非線形世界がそれでも理解できる（気分になれる）のは現象論的理解が要所で可能なためであり，それはユニバーサルな構造の存在のためだ，というのがここまでの話である．では，どうしたら現象論のユニバーサルな数学的構造を自覚的に見抜けるか？

ミクロの立場から見ると，大きなスケールは遥か彼方にあるから，ミクロからみるとある種の漸近的挙動を見抜くことが巨視的世界の普遍的数学的構造を見抜くことに相当するだろう．

与えられた系のユニバーサルな特徴を見出すために，(マクロスケール)/(ミクロスケール)→∞ の極限を考えよう．†† 極限で収束するような量はその極限でミクロスケール依存性を持たないからユニバーサルな量だ．したがって発散する量（極限で落ちつかない量）のみがミクロスケールの詳細に依存する量である．そこで，この極限で発散する量を調節パラメタのなかに隔離することができれば，残りはユニバーサルな数学的構造であろう．

ミクロの詳細に敏感に依存する部分（すなわち発散）をいくつかの調節パラメタの値の変化の中に押し込んでしまえるとき，考えている系はくりこみ可能であると言われる．くりこみ可能な系は現象論で記述することができ，逆に，現象論をもつ一連の系はくりこみ可能なモデルで記述されるはずである．重要なことは，ミクロの詳細な影響はないどころか極めて大きいのだが，それが出現するところが気紛れでなく，しばしば局限されていることだ．

くりこみの解説はたくさんあるけれども，いわゆる場の理論で使うくりこみの初等的解説はあまりない．そこで，数学的形式が同じカリカチュア，Koch 曲線（次頁の図 1）の長さ，を例にとってそのイロハを丁寧に見ておこう．†††

まず現象論的構造 (2.2) があることをあらかじめチェックしておこう．lを曲線の最小単位の長さ，Lを折線の全長，そしてL_0を図にあるような曲線のさしわたしとする．図中の Koch 曲線を作る操作をn回実行したあと$L=(4/3)^n L_0$となる．ここで

$$n=\log_3(L_0/l), \tag{3.1}$$

だから

$$L=L_0^{\ln 4/\ln 3}\, l^{1-\ln 4/\ln 3} \tag{3.2}$$

が得られる．lがいろいろ異なる Koch 曲線を集めてながめると，その‘真の’長さはL_0の関数としていつも$L_0^{\ln 4/\ln 3}$に比例している（ユニバーサルな数学的構造）．しかし，$L_0^{\ln 4/\ln 3}$とLの比例係数は（lに敏感だから）さまざまである（現象論的調節パラメタ）．簡単な例ではあるが，2 節に述べた現象論の構造がきちんと現れている．

どうしたら一般にこのような‘腑分け’ができるだろうか？ 詳細を変化させた時の不変量を追求するという戦略

† こう言うと，たぶんこれは数学的現象論というものであって，Boltzmann が厳しく批判したものであると言われそうである（田中 正：『物理学的世界像の発展』（岩波，1988））．しかし，根本的違いは，数学的構造を客観的実在と見るところにある．その根拠は本節冒頭に述べた，いわば，動物行動学的人間原理である．

†† 我々の知覚する世界ではここで考えている比が極めて大きいということは重要である．つまり，この比が大きな系のみ知能を持ち得たのである．

††† Koch 曲線の長さを決める問題は海岸線の長さを測る問題の単純化されたものである．海岸線の長さの問題は，フラクタル屋さんたちが考えるよりも深い意味を持った例である．波のために，その長さは，小さなスケールで揺らいでいる．それどころか細かく見るほど激しく揺らいでいて，精度の極限では図形そのものがない．

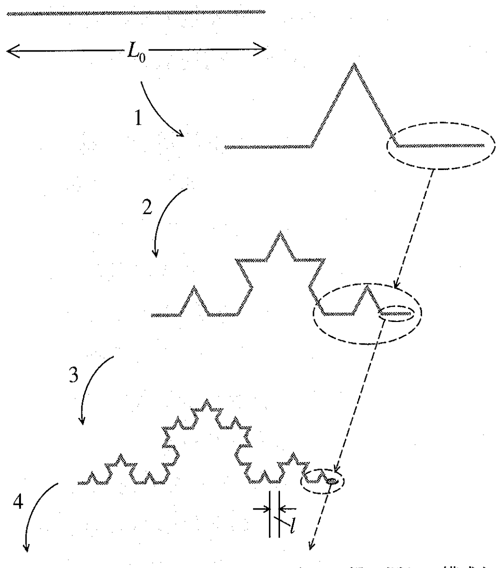

図1 Koch 曲線．このようなおきかえを次々に繰り返して構成していく．

が上にのべられている．この戦略をStückelberg–Petermann (–Gell-Mann–Low) 流のくりこみ処方という．ゆすぶってみてひどくガタつく部分（発散する部分）を取り除くと残りがユニバーサルであろうという考えである．

巨視的観測者が知っている量はL_0，実際に測った長さ$\tilde{L}$，および観測のスケール（解像度）λである．そこで，次元解析は次の関係を意味する：

$$\frac{\tilde{L}}{\lambda}=f\left(\frac{L_0}{\lambda}\right). \tag{3.3}$$

λは観測者が持ち込んだ量であり，系（今の場合は曲線）それ自体とは無関係である．したがって，'真の' 長さLはλによるはずがない（実在への信仰）ので，系（モデル）を固定しておいて（つまりlとL_0とを固定して）λを変えてもLは不変である：

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0. \tag{3.4}$$

ここでλをかけたのは，あとで式をきれいにするためだけで，本質的意味はない．本質は$\partial L/\partial\lambda=0$，つまり，「我々を離れて世界は存在する」.* だれも '真の' 長さLそのものは知らないが，それは観測のスケールλで測定した長さ$\tilde{L}$に比例しているであろう（実在への信仰）：

$$\tilde{L}=ZL. \tag{3.5}$$

この比例係数Zをくりこみ定数という．Zはλに依存する無次元量だから，無次元量λ/lの関数と考えられる．これは巨視的観測ではわからないから（くりこみを考えるときは，いつも，何を知っていて，何を知りえないか，をわきまえていなくてはならない：知ルヲ知ルトナシ，知ラズヲ知ラズトナセ，というのが極意である），調節パラメタであり，発散を封じ込めてよい場所である．

$$L=Z^{-1}\tilde{L}=Z^{-1}\lambda f(L_0/\lambda) \tag{3.6}$$

と書くと (3.4) から

$$f(x)-\alpha f(x)-xf'(x)=0 \tag{3.7}$$

が得られる．ここに

$$\alpha\equiv\partial\ln Z/\partial\ln\lambda. \tag{3.8}$$

これは，$l\to 0$の極限で一定値に収束すると仮定する.** (3.4) やその結果の (3.7) のような式をくりこみ群方程式 (renormalization group equation) という．(3.7) を解くと

$$f(x)\propto x^{1-\alpha},$$

つまり

$$\tilde{L}\propto L_0^{1-\alpha}\lambda^{\alpha}. \tag{3.10}$$

これは (3.2) のかたちをしていて，ユニバーサルな構造が抜きだされたことになる．

ここまでは，「真の」長さがどうなっているか，などということに注意は払ってこなかったが，(3.5) を使うためにはLの挙動を知らなくてはならない．$l\to 0$でのLの発散は，lを1/3にすると全長が4/3倍されるのだから$(4/3)^{-\log_3 l}=l^{1-\ln 4/\ln 3}$のように振舞う.*** そこでこの発散を除くようにくりこみ定数は$Z(\lambda/l)\propto(\lambda/l)^{1-\ln 4/\ln 3}$と決められる．$\alpha=1-\ln 4/\ln 3$である．(3.10) にこれを代入すると

$$\tilde{L}\propto L_0^{\ln 4/\ln 3} \tag{3.11}$$

と先の結果を再現する．くりこみ群方程式は自明な主張から出てきているが，これと観測量のλ/l依存性をくりこみ定数のなかに押し込むことができるという要請（これは現象論の存在の要請である****）を組み合わせると，観測可能量の構造に強い制限がかかる．そこで，他の断片的情報，たとえば摂動論による結果などからかなりのことが言えるようになる．しかし，あくまでも摂動論は道具であって，くりこみそのものとは無関係であることを忘れてはならない．

4. 漸近解析の道具としてのくりこみ

前節のくりこみの説明は漸近挙動の抽出というところから話が始まったが，もっと直接的にそうであることを示す

* ただし，先の注に述べたようにその世界がどんなミクロのスケールまでもちゃんと存在している必要はない．モネの睡蓮のように近くから見ると内部構造など全くなくてもよい．つまり，実在の意味は微妙である．少なくとも日常的意味と同じでなくてよい．

** 今の例では実際に定数である．

*** これはすでに (3.2) で見たではないか，堂々めぐりをしている，と読者は思うだろう．ここの例はひどくちゃちなので，雑に計算したのと先のようにきちんと計算したのとの差がないからそう見えても仕方がない．実際には，先にしたようなきちんとした計算はできないのが普通だが，発散を見積もるのははるかに易しく，堂々めぐりはしたくてもできないのである．

**** こんなことを要求できるとは限らない．しかし，経験的に現象論のあるときこれを要求するのは経験科学者としては当然であろう．勿論，理論が実際にくりこめるかどうかは数学的に論証されるべきことである．これは一般には大変な仕事であるから，くりこみが可能だとして何が得られるかを調べるというのは生産的態度だ．

極めて単純であるが本質的な例を見よう．

$$\epsilon\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,\quad \epsilon\ll 1. \tag{4.1}$$

この問題は簡単に手で解ける†が，$\epsilon=0$ のときのみ解けるつもりになって，摂動計算を実行しよう．$y=y_0+\epsilon y_1+\cdots$ のように展開すると簡単な計算で

$$y=A_0\mathrm{e}^{-t}-\epsilon A_0 t\,\mathrm{e}^{-t}+O(\epsilon^2) \tag{4.2}$$

が得られる．初期時刻を0とおき，A_0を初期条件で決まる定数とした．こんな計算をやってはいけないと普通は怒られる．その理由は第ゼロ次の項に対して一次摂動項がϵt倍されているからである．これは，tとともにいくらでも大きくなって「摂動効果」が「摂動」でなくなってしまう(永年項の出現)．†† この種の困難に対処するために特異摂動論とまとめて呼ばれる方法が山のように開発されてきたのであった．[4)]

ここで欲しいのは長時間後の挙動である．観測しつつある時刻(今)tは初期時刻0から大きく隔たっている．そうすると，今の観測値から初期値を正しく得ることは困難である．yは直接観測にかかる量であるから知ることができるのと対照的に，A_0は(漸近的には，つまり，今の例では初期条件が無限の過去に与えられたという極限で)観測にかかる量ではない(再び，知ルヲ知ルトナシ，知ラズヲ知ラズトナセ)．ここでtとともに†††発散している量は何であろうか？ それは，例えば，ゼロ次と一次の項の比である．†††† そこでこの無限大を$t-\tau+\tau$とわけて，観測できないA_0を修正することによってτを吸収して，それ全体を調節パラメタ$A(\tau)$にしてしまう(これは今の時刻tのまわりでの挙動が観測に合うように決められる)というのがくりこみの考えである．このくりこみの後(4.2)は

$$y=A(\tau)\mathrm{e}^{-t}-\epsilon A(\tau)(t-\tau)\mathrm{e}^{-t}+O(\epsilon^2) \tag{4.3}$$

となる(τと前節の$\ln\lambda$が対応していることがわかる)．

τははじめの問題にはなかったパラメタだから当然$\partial y/\partial\tau=0$．これが，今の問題のくりこみ群方程式である．これからϵまでのオーダーで††††† (以下の計算では，ϵについて高次の項は捨てる)

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}=-\epsilon A. \tag{4.4}$$

くりこまれた摂動展開式(4.3)は$\tau=t$とおくときわめて簡単になる：

$$y=A(t)\mathrm{e}^{-t}. \tag{4.5}$$

(4.4)から$A(t)$は次のような‘振幅方程式’にしたがうことになる：

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=-\epsilon A(t). \tag{4.6}$$

この方程式はAが$t\sim 1/\epsilon$のオーダーの長い時間スケールでのみ有意に変化する(つまりゆっくりとしか変化しない)ことを示している．最終的に，Bを調節パラメタとして

$$y=B\,\mathrm{e}^{-(1+\epsilon)t}+O(\epsilon^2). \tag{4.7}$$

これはϵのオーダーまで正しい．*

この簡単な例は次の二つを教える：

(1) 永年項は発散であり，くりこみはこの発散を除去して特異摂動論が与える結果を与える，つまり，特異摂動論はくりこまれた普通の摂動論である．

(2) くりこみ群方程式はゆっくりした時間スケールの現象を支配する方程式である．

上の単純な例からこれだけのことを結論するのは太い態度だと言われても仕方がないから，常微分方程式の練習問題を二つあげておく．

問題 1. van der Pol 方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=\epsilon(1-x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4.8}$$

のリミットサイクルへの漸近をϵのオーダーで記述せよ．

□

この場合くりこまれた摂動の結果は**

$$x(t)=A(\tau)\mathrm{e}^{it}+\frac{1}{2}\epsilon(t-\tau)A(\tau)(1-|A(\tau)|^2)\mathrm{e}^{it}+\mathrm{c.c.}+\cdots \tag{4.9}$$

であり，くりこみ群方程式$\partial x/\partial\tau=0$をつくって$\tau=t$とおくと振幅方程式が$O(1)$で得られ，

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\epsilon A(1-|A|^2). \tag{4.10}$$

最終的に答えは$x(t)=A(t)\mathrm{e}^{it}$．*** 確かに，リミットサイクルが得られている．

問題 2. つぎの摂動されたSchrödinger方程式の長時間挙動を調べよ：****

† なんだこれは線形問題ではないか，と思われるかもしれないが，実は，初期条件を与える時刻を変えることに対してはこの系は非線形系である．

†† 線形応答理論による電気伝導度の中野公式の純量子力学的導出が破綻する理由の一つも，散逸で生ずる熱による永年項が単純に無視されているからである．現象論を加味しない導出は，散逸過程のきちんとした力学的記述なしには不可能であり，今のところ存在しない．文献3参照．

††† tそのものは尺度の比のようなものである．

†††† この発散は摂動展開に由来するものではない．真の解と$\epsilon=0$の場合の解の比は$t\to\infty$の極限で確かに発散している(ゼロか無限大である)．

††††† $\mathrm{d}A/\mathrm{d}\tau$が$\epsilon$のオーダーであることに注意．

* 正確に言うと，$\epsilon t\sim 1$なる時間まで一様にオーダーϵまで正しい解になっている．

** 上と同じように，単純な摂動を実行して，永年項(tに比例する項)でtを$t-\tau+\tau$とわける；e^{3it}などの‘非共鳴項’は無視している．

*** 本当はここまで無視してきた非共鳴項も考えなくてはならない．最低次の計算ではこのように単純に永年項を分けるだけでよいが，より高次の計算をきちんとやるには，くりこみ定数$Z=1+\epsilon a_1+\cdots$をまじめに導入して$A=ZA_0$のようにくりこまれた初期条件のようなものを使わなくてはいけない．

**** $\hbar$を1とする単位系をとる．

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T=(H_0+\epsilon h(t))T. \tag{4.11}$$

□

この問題では演算子の順序を尊重しなくてはいけないという多少のめんどうはあるが，くりこまれた摂動の結果は†

$$T=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}\left[1+\frac{\epsilon}{\mathrm{i}}\int_\tau^t h^*(s)\mathrm{d}s\right]A(\tau)+\cdots. \tag{4.12}$$

そして，くりこみ群方程式 $\partial T/\partial\tau=0$ で $\tau=t$ とおくと，Fermi golden rule などを導くときに見慣れた式になる：

$$i\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\epsilon h^*(t)A(t). \tag{4.13}$$

ただし，以上で $h^*(t)$ は相互作用表示の摂動ハミルトニアン

$$h^*(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} \tag{4.14}$$

である．答えは，(4.13) の答えを使って，周知のように $T(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}A(t)$ となる．

(4.10) も (4.13) もまさにスローモーション方程式（$\epsilon\times t$ が有意の大きさになって初めて A が変化する）であり，逓減摂動法の結果がくりこみの方法で得られることがわかる．より一般に，くりこみ群方程式が時空粗視化された運動を記述するという考えが自然に得られる．それならば，たとえば力学的記述から，運動論的な方程式がくりこみで得られるべきだ．たとえば，BBGKY 方程式から Boltzmann 方程式が得られてよい．[5] 実際にそういうことができる．では，Navier–Stokes 方程式はどうだろうか？ 逓減摂動法で Boltzmann 方程式から Navier–Stokes 方程式が出せることを，蔵本がつとに指摘していることからわかるように，[6] たしかに，Navier–Stokes 方程式はくりこみ群方程式として理解できる．ただし，この導出では流体の密度が低いことを前提にした計算がなされており，Navier–Stokes 方程式のユニバーサルな性質を考えると，もっと弱い条件下の理論がほしい．特異摂動の問題へのくりこみの応用の技術的詳細は文献 7 を参照されたい．

5. より広い文脈で—しめくくり—

かくして，「くりこみ」は非線形系の研究手段の一つとして一般的にとらえられるべきである．一般に，自然は広狭さまざまのユニバーサリティクラスからできているとみられる．そのためにくりこみの考え方は有用なのである．世界がそうなっていると言えるのは，それが我々のような知能を持った生き物の進化さえ許すからだ．††

くりこみ理論についての今後の問題は大きく二つある．一つは「理論」の構築である．もう理論といっているではないかと言われるだろうけれども，数理物理的にはほとんど何もわかっていない．一般的な結論らしく述べた (1) と (2) にしても，スローガンとしてはよいが，その内容は（理論物理程度の論理の粗さの水準でさえ）そんなにはっきりしたものではなく，何をどう証明するとすっきりするのかということから明確にして行かなくてはならない．†††

もう一つの問題は，基礎ではなく，さらなる応用についてである．生物の問題では，現実的なモデルが恐ろしく込み入ったものであることは想像に難くない．そのごく小さな部分品の研究でさえ分子動力学の限界をはるかに越えている．さらに我々は大域的な挙動が知りたいのだから，たとえ計算ができてもその結果のほとんどに関心がない．ミクロなモデルの計算物理が必要なのは問題の勘所がわからないからである．だから，たとえ計算機が発達してなんでも計算できるようになっても，アホなことにほとんどの労力を費やしたという事実は残る．「くりこみ」的な考え方が系の逓減に重要であろうとは想像がつくが，系がややこしすぎて手でこれをやるわけには行かない．ダイナミックな問題で，計算物理にくりこみの考え方を使えるようにせよ，というのが代表的課題である．勿論「くりこみ，くりこみ」とお題目を唱えても何も出てこない．簡単な例から地道に積み上げていく以外，ほかにやり様はないだろう．

こういうことは，しかし，技術的な話だから，それほど大事ではない．「くりこみ」に意味があるのはそれがほとんど「科学のものの見方そのもの」であるからではなかろうか．そうなら，「くりこみ，くりこみ」と改めて言うほどのこともないではないか．その通り．だが，「言わなくてもいいはずのこと」に触れる必要もあるように見える．

今までは，物理は「物」にもとづいて現象を分析するという行き方を採り（だから「自然学」は「物理」と訳されてしまった）めざましい成功を収めた．分子は原子からなり，原子は電子と原子核から，…という風に説明していくと，すべての根本的説明を与えていそうにみえる一点が想定できるところまできた．つまり，チョークはなぜ白いか物質の構造で説明しきれそうなところまできた．

では「チョークもメリケン粉も白いのはなぜだろうか？」原子構造にまで遡ってこれを説明することは意味がないだろう．Navier–Stokes 方程式の体現するユニバーサリティを，水や水飴の分子構造から理解しようとするのもすでに的がはずれているし，素粒子にまで遡ることはまったく無意味だ．「くりこみ」の考えが追究しているのは現象の数

† 積分を 0 から τ と，τ から t との二つに分けて，前者を初期位相にくりこんでしまう．

†† 神を生産しうる程度の神経系が進化できるほどに世界は秩序だっている．

††† ここでは，統計物理屋にもっとなじみがあると思われる Wilson 流のくりこみはまったく論じなかったが，これと，Stückelberg 流のくりこみの関係も，きちんとわかっているとはいえない．

学的本質(現象論)であり，上の質問が問うていることは素朴だがその例である．くりこみ理論で言うところの「現象論」が調節パラメタを適当に含むいい加減な近似理論ではないことは2節の例に見た通りである．より精密な理論があり，その実用的'近似'として'現象論'があるのではないのだ．[8]

「現象論」を二次的な理論と見る従来の立場に欠けていたのは，「波を離れて水はない」* という発想であった．普通は，物が現象を担う，物が基本だと考えてきた．しかし，波動を担えないような液体の水が存在できないのもまた自明である．くりこみ的語法を使うと，ユニバーサリティクラスを離れてものは存在しない．

勿論，こんな立場はひどく極端だ．しかし，同じくらいに唯物論も極端なのだという認識は持つべきであろう．

最近の反科学論では，科学にも前提とする検証不可能な要素(そんなものは全くないと言える人はよっぽどのんきな人だ)があるのだから，十分に非科学的であり，星占術と天文学に本質的差はないとまで主張する．自然科学が観測事実に基づくというだけではこれに反論することはできまい．科学(物理)を特徴づけるのに「観測事実に基づく」と言うのは，不十分である．「観測不可能なものに左右されない」ということの方が基本的であろう．つまり，実証不可能な事柄(唯物論とかその否定とかの形而上学)を変えても不変な部分のみが真に科学的な部分である．変換不変性を追究するのが基礎物理学であったことをより高い立場から思い起こそう．結局「くりこみ」でユニバーサリティを追究するときの指針「知ルヲ知ルトナシ，知ラズヲ知ラズトナセ」は科学の基本であり，「くりこみ」的見方は基本に返る，初心に返るということなのだろう．

*「波を離れて水のあらばや」(一休諸国噺，巻四)参照．

この文は，昨年仙台における「サイエンスセミナー物理科学への招待」での講演に基づく．この機会を与えられた佐藤武郎氏ら東北大学の方々，さらに当時滞在中であった慶應義塾大学物理学科の方々にたいへんお世話になった．田崎晴明，佐々真一および柴田達夫の各氏には懇切な注意，助言をいただいた．田崎氏らと共著のくりこみの解説[8]を書く機会はこの記事のためにも大いに為になった．筆者の慶應大学滞在は株式会社東芝の資金援助による．またNFS研究資金NFS DMR-93-14938の部分的援助による研究を利用した．ここにまとめて感謝する．

参考文献

1) Y. Oono: AIP Conf. Proc. No. 137 (1985) 187; 日本物理学会誌 **42** (1987) 311.
2) T. Ohta and A. Nakanishi: J. Phys. A **16** (1983) 4155.
3) H. Nakano: Int. J. Mod. Phys. B **7** (1993) 2397.
4) 推薦できる入門書は，E. J. Hinch: *Perturbation Methods* (Cambridge Univ. Press, 1991)，実践家向き参考書は今や古典のC. M. Bender and S. A. Orszag: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, 1978).
5) このあたりの入門書は，たとえば，J. A. McLennan: *Introduction to Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Prentice Hall, 1989).
6) 蔵本由紀：物性研究 **49** (1987) No. 3, 299.
7) L.-Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono: Phys. Rev. E **54** (1996) 376–394.
8) 大野克嗣，田崎晴明，東島　清：数理科学 **35** (1997) No. 4, 5—くりこみ理論の地平．大野克嗣：*ibid.* p. 13.

日本物理学会誌　第52巻　第8号(1997年8月号)予定目次